

采用绝对节点坐标法的剪式单元 可展机构动力学分析

彭麒安¹, 李博², 荣凯², 乔喆焯², 王三民²

(1. 中国工程物理研究院电子工程研究所, 621900, 四川绵阳; 2. 西北工业大学机电学院, 710072, 西安)

摘要: 针对可展机构在工程实践中由于质量轻、柔度大、尺寸大等特点而暴露出展开精度低、控制复杂和运动失稳等问题, 采用绝对节点坐标法(ANCF)从多柔体角度分析了构件柔性对剪式单元可展机构动态特性的影响。首先, 基于绝对节点坐标法, 提出了一种新型无闭锁平面梁单元; 然后, 考虑服役于太阳能帆板、伸展臂等空间机构的剪式单元可展机构的构型特点与运动条件, 基于第一类拉格朗日方程建立了三单元可展机构动力学模型; 最后, 采用动力学模型分析了杆件柔性对可展机构动力学行为的影响。研究结果表明: 所提出的新型单元在解决单元闭锁问题的同时, 将计算效率提升了18.2%; 构件柔性会导致不同构件间产生共振和谐振现象, 影响可展机构的展开精度。该研究可为大型、超大型伸展臂的在轨展开提供理论参考。

关键词: 绝对节点坐标法; 剪式单元; 可展机构; 无闭锁单元; 柔性多体动力学

中图分类号: TH164 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202308017 **文章编号:** 0253-987X(2023)08-0172-10

Dynamic Analysis on Deployable Mechanisms with Scissor-Like Elements Using Absolute Nodal Coordinate Formulation

PENG Qi'an¹, LI Bo², RONG Kai², QIAO Zheye², WANG Sanmin²

(1. Institute of Electronic Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, China;

2. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: For problems of low deployment accuracy, complex control, and motion instability of deployable mechanisms exposed in engineering due to the characteristics of light weight, large flexibility, and large size of components, the absolute nodal coordinate formulation (ANCF) is used to analyze the impact of component flexibility on the dynamic characteristics of deployable mechanisms with scissor-like elements from the perspective of multiple flexible bodies. Firstly, based on ANCF, a new non-locking planar beam element is proposed. Secondly, considering the configuration characteristics and motion conditions of deployable mechanisms with scissor-like elements serving in spatial mechanisms such as solar panels and extension arms, a dynamic model for deployable mechanisms with three scissor-like elements is established using the first type Lagrange equation. Finally, the influence of rod flexibility on dynamic behaviors of deployable mechanisms is analyzed by this model. The research results show that the proposed new element improves the computational efficiency by 18.2% via solving the element locking problem, and the

收稿日期: 2022-10-02。 作者简介: 彭麒安(1993—), 男, 博士生; 李博(通信作者), 男, 副研究员。 基金项目: 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2022JM-195); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(G2023KY0602); 世界一流合作伙伴项目(23GH050114)。

网络出版时间: 2023-04-06

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20230406.1434.003.html>

flexibility of components can lead to resonance of different components, affecting the deployment accuracy of deployable mechanisms. The research can provide theoretical reference for the deployment of large/ultra large extension arms in orbit.

Keywords: absolute nodal coordinate formulation; scissor-like element; deployable mechanism; non-locking element; flexible multi-body dynamics

可展机构是在 20 世纪 60 年代后期,随着航天科技发展而诞生的一种新型宇航结构^[1]。为满足苛刻的空间环境条件与特殊任务需求,可展机构历经 60 余年发展,诞生了不同类型的展开机构,如充气式天线、环柱式天线、整体展开天线等^[2-4]。组成可展机构的单元类型有很多,主要包括剪式单元^[5]、平行四边形单元^[6]、Bricard^[7] 连杆机构和 Bennet 连杆机构^[8]等。剪式单元组装而成的剪式可展机构由于具有收缩率大、展开动作可靠、高精度和高刚度等特点,被广泛应用于平面伸展臂^[9]、四边形截面伸展臂^[10]、球面网格体系^[11]等结构中。由于航天机构不断向轻质、高精密方向发展,一些具有轻质量和柔性特点的柔性构件也被广泛应用于机构中,而柔性构件的弹性变形与大范围运动耦合,给机构动力学特性研究带来较大困难^[12]。因此,为了确保可展机构在轨展开精度,开展对该类航天铰接机构的展开动力学特性分析就显得尤为必要。

当前,对可展机构动力学特性的研究主要从以下几方面展开:①铰链的非线性;②杆件柔性^[13];③关节与杆件柔性的多尺度耦合^[14]。对于大型可展机构,因其具有展开尺度大、柔性部件多、构形复杂等特点,展开过程不仅呈现出系统大范围运动与柔性部件大变形之间的非线性耦合特征,还表现出系统长时间尺度运动与含间隙运动副在极短时间内碰撞的多时空尺度耦合特征。因此,较成熟的多刚体系统动力学和基于浮动坐标法的多柔体动力学在解决这类机构的动力学问题时表现出一些不足。考虑到大型可展机构在展开运动过程中会经历大的整体运动和大变形,一些学者采用绝对节点坐标(ANCF)法^[15]描述可展机构的展开运动过程。Peng 等^[16]基于太阳辐射通量引起的温度诱导振动对可展机构展开运动同步性的影响,提出了一种可展机构热-柔耦合动力学分析方法。Otsuka 和 Makihara 基于 ANCF 法内部约束方程,模拟了空间柔性飞机机翼的展开过程^[17]。上述研究主要是基于绝对节点坐标法对一些简单的多体机构进行动力学分析,而在面对可展机构这类复杂构件时,动力学模型复杂、数值计算效率低以及精度不够等问题便暴露出来。

ANCF 法在描述大型可展机构时具有质量矩阵

为常数、模型精度高、可以采用非增量迭代得到精确解等优点^[18],但由于 ANCF 的剪切变形单元存在着泊松锁、厚度锁和剪切锁等 3 大闭锁问题^[19-22],以及与传统有限元梁单元相比具有更高的非线性弹性和更多的自由度^[23],导致该方法在应用过程中计算效率低,限制了其在大型可展机构中的应用。Carcia-Valleio 等^[19]提出了一种三节点平面缺省梁单元,从根本上解决了厚度闭锁问题,但剪切闭锁问题依然只能通过选择降阶积分的方式来解决。Omar 等^[24]考虑了平面梁的剪切变形,提出了一种平面全参数梁单元,但由于轴向与径向上插值阶数不同,仍出现了剪切闭锁问题。为了解决三维全参梁的泊松锁问题,Shabana 等^[25]提出了一种高阶梁单元,可以捕获梁截面的翘曲变形。上述研究针对梁单元的单一闭锁问题进行了改进,但未能同时解决平面单元剪切闭锁与厚度闭锁问题,为工程应用带来困难。本文通过改变形函数,提升了由弯曲引起的应变阶次,同时使得梁厚度不再是两端面的线性插值,从根本上解决了经典梁单元的剪切闭锁与厚度闭锁问题。同时,基于绝对节点坐标理论建立了可展机构的柔性多体动力学模型,并提出了一种新的无闭锁平面梁单元,能准确描述可展机构各杆件的大范围运动和变形运动。

首先,系统分析了 3 大闭锁问题及其产生的原因,在改进平面梯度缺省梁单元的基础上,提出了一种新的无闭锁平面梁单元,可有效规避经典梁单元中的闭锁问题;然后,采用理论力学和连续介质力学理论分别推导了梁单元的动能方程和势能方程,利用拉格朗日方程提取梁单元的质量矩阵和刚度矩阵,与虚功原理推导出的广义力相结合,建立了梁单元的动力学模型,在此基础上通过引入剪式单元线阵列可展机构的 4 类约束方程,建立了整个可展机构的柔体展开动力学模型;最后以三单元剪式可展机构为例,验证了本文方法的正确性与有效性。

1 经典平面剪变梁单元闭锁问题

图 1 为 Shanaba 提出的经典平面剪变梁单元模型,坐标原点 o 位于梁单元左端截面中心处, x 轴与梁单元中轴线重合, y 轴沿梁单元端面方向,图中 ϑ 为剪切角, h 和 l 分别为未变形情况下梁单元的截面

高度和长度。可以看到由于考虑了剪切变形,该梁单元中轴线的切线不再与梁截面法线重合。

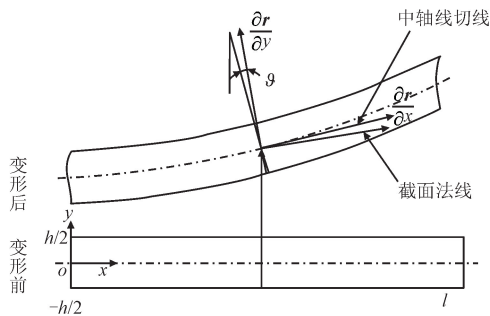


图1 经典平面剪变梁单元

Fig. 1 Classical plane shear beam element

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} s_{c,1} & 0 & l s_{c,2} & 0 & l s_{c,3} & 0 & s_{c,4} & 0 & l s_{c,5} & 0 & l s_{c,6} & 0 \\ 0 & s_{c,1} & 0 & l s_{c,2} & 0 & l s_{c,3} & 0 & s_{c,4} & 0 & l s_{c,5} & 0 & l s_{c,6} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $s_{c,1} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $\xi = x/l$; $s_{c,2} = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$; $s_{c,3} = \eta - \eta\xi$, $\eta = y/l$; $s_{c,4} = 3\xi^2 - 2\xi^3$; $s_{c,5} = -\xi^2 + \xi^3$; $s_{c,6} = \eta\xi$

绝对节点坐标法虽然能更加准确地描述大转动和大变形梁的柔体运动,但由于经典剪变梁单元会发生不同类型的闭锁现象,因此不仅会降低经典梁单元的计算效率,更对仿真精度产生了很大的影响。

1.1 泊松闭锁

取梁单元上任一微元,在弯矩载荷作用下其轴向正应力为 σ_x ,沿截面 y, z 方向的横向正应力分别为 σ_y, σ_z ,则横向正应变可写为

$$\begin{cases} \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad (3)$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比。同样地,轴向正应变可写为

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (4)$$

对于截面能够自由变形的绝对节点坐标梁单元,在弯矩载荷作用下其截面由初始的矩形截面变为梯形截面,此时截面上的横向正应力 σ_y, σ_z 应为零,即

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)中,可得此时的轴向正应变为

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (6)$$

然而,由于经典梁单元缺失该变形模态,故从运动学上不可能实现该截面变形。为了保证有限元解

根据绝对节点坐标理论,全局坐标系下梁单元的位移场定义为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 x^3 \\ b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + b_4 x^2 + b_5 x^3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_c \mathbf{e}_c \quad (1)$$

式中: $\mathbf{r}$ 为梁单元上任意一点在全局坐标系下的位置矢量; a_i 和 b_i ($i=0, 1, \dots, 5$) 为多项式的系数; x, y 为梁坐标系中的空间坐标,其中 x 为沿轴向的单元局部坐标, y 为沿径向的单元局部坐标; $\mathbf{S}_c$ 和 $\mathbf{e}_c$ 分别为梁单元的形函数和广义节点坐标,其中 $\mathbf{S}_c$ 为

的平衡,必须令横向正应变 ϵ_y, ϵ_z 为零,即

$$\epsilon_y = \epsilon_z = 0 \quad (7)$$

由此又会导致残余横向应力的产生,由式(3)可得

$$\begin{cases} \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad (8)$$

由于存在残余横向应力,轴向正应变将会受到影响,不再如式(6)所示。为求得其具体表达式,先对式(8)进行处理,得

$$\sigma_y + \sigma_z = \frac{2\nu}{1-\nu} \sigma_x \quad (9)$$

将式(9)代入式(4),得

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \sigma_x \right) = \frac{\sigma_x}{E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \quad (10)$$

可以看出,当 $\nu \in (0, 0.5)$ 时,式(10)跟式(6)不再相等,且前者得到的轴向正应变小于后者,故基于式(10)得到的变形量将小于解析解。

1.2 剪切闭锁

根据小变形假设,轴向应变 ϵ_x 和曲率线性相关,且曲率可用横向挠度的二阶导数表示,则

$$\epsilon_x = -y v_{xx} + u_x \quad (11)$$

式中: u_x 为轴向变形; v_{xx} 为挠度关于 x 的二阶导数,可近似写为

$$v_{xx} = \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} = 2b_4 + 6b_5 x \quad (12)$$

可见, v_{xx} 是关于轴向单元局部坐标 x 的线性函数。将式(12)代入式(11),可得

$$\epsilon_x = -y(2b_4 + 6b_5 x) + u_x = \epsilon_{b,x} + \epsilon_{a,x} \quad (13)$$

式中: $\epsilon_{b,x}$ 为弯曲变形相关的轴向应变; $\epsilon_{a,x}$ 为轴向

变形相关的轴向应变。

根据连续介质力学理论,也可推得线性情况下经典平面梁单元的轴向应变为

$$\epsilon_x = \frac{\partial r_1}{\partial x} = a_1 + a_3 y + 2a_4 x + 3a_5 x^2 \quad (14)$$

对式(14)进行同样的分类整理,可得

$$\epsilon_x = \epsilon_{a,x} + \epsilon_{b,x} \quad (15)$$

式中: $\epsilon_{a,x} = a_1 + 2a_4 x + 3a_5 x^2$; $\epsilon_{b,x} = a_3 y$ 。

由此可见,两种方式得到的轴向应变均来源于两部分:一部分与轴向变形相关,另一部分与弯曲变形相关。对比式(13)和(15)可知,当采用连续介质力学方法后,基于式(1)推导出的由弯曲引起的应变 $\epsilon_{b,x}$ 不再随 x 线性变化,而是变成了沿轴向的恒定数值,即 $\epsilon_{b,x}$ 从 x 的一阶函数变为了零阶函数。应变 $\epsilon_{b,x}$ 阶数的降低不仅消除了梁单元某些潜在的变形模态,更导致了虚假的抗弯刚度,使得经典平面剪变梁单元产生剪切闭锁现象。

1.3 厚度闭锁

为了分析厚度闭锁现象产生的原因,先将梁单元上任意一点的位置矢量分为两部分,即该点对应截面中点的位置矢量和该截面中点到该点的位移矢量,如图 2 所示。图中 XOY 为惯性坐标系,坐标原点 O 为平面内任意一点, X 轴与未变形梁单元中轴线平行, Y 轴与未变形梁单元端面平行。

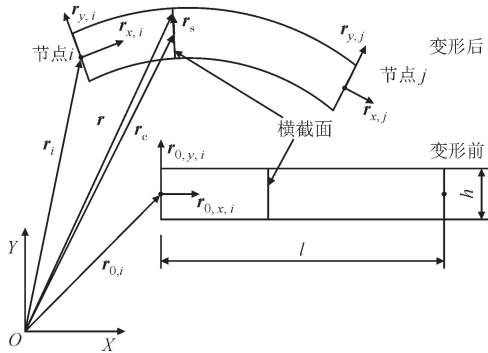


图 2 经典平面梁单元变形前后示意图

Fig. 2 Schematic diagram of classical planar beam element before and after deformation

由上,位置矢量 $\mathbf{r}$ 可重新表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_s \quad (16)$$

式中: $\mathbf{r}_c$ 为该点投影到中心线上对应点的位置矢量; $\mathbf{r}_s$ 为投影点到该点的位移矢量。结合式(1),上述两矢量的表达式分别为

$$\mathbf{r}_c = s_1 \mathbf{r}_i + ls_2 \mathbf{r}_{x,i} + s_4 \mathbf{r}_j + ls_5 \mathbf{r}_{x,j} \quad (17)$$

$$\mathbf{r}_s = ls_3 \mathbf{r}_{y,i} + ls_6 \mathbf{r}_{y,j} \quad (18)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i = [e_1 & e_2]^T \\ \mathbf{r}_j = [e_7 & e_8]^T \\ \mathbf{r}_{x,i} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x} = [e_3 & e_4]^T \\ \mathbf{r}_{x,j} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial x} = [e_9 & e_{10}]^T \\ \mathbf{r}_{y,i} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial y} = [e_5 & e_6]^T \\ \mathbf{r}_{y,j} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial y} = [e_{11} & e_{12}]^T \end{cases} \quad (19)$$

其中 e_1, e_2, e_7, e_8 分别为节点 i 和 j 的全局位置坐标; $e_3 \sim e_6$ 为节点 i 的斜率坐标; $e_9 \sim e_{12}$ 为节点 j 的斜率坐标。

从式(17)和(18)可以看到,由于 $\mathbf{r}_c$ 是仅关于轴向坐标 x 的函数,因此中心线上的点可用局部坐标 x 表示;而 $\mathbf{r}_s$ 则是分别关于轴向坐标 x 和横向坐标 y 的线性函数,需要局部坐标 x, y 共同表达。将式(2)代入式(18),可得

$$\mathbf{r}_s = l\eta[(1-\xi)\mathbf{r}_{y,i} + (\xi)\mathbf{r}_{y,j}] \quad (20)$$

已知横向坐标 y 的取值范围为 $[-h/2, h/2]$, 将其代入式(20)即可得经典梁单元任意截面上端面点的位移矢量和下端面点的位移矢量为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{s,t} = \mathbf{r}_s(x, h/2) = \frac{h}{2}[(1-\xi)\mathbf{r}_{y,i} + \hat{\mathbf{r}}_{y,j}] \\ \mathbf{r}_{s,b} = \mathbf{r}_s(x, -h/2) = -\frac{h}{2}[(1-\xi)\mathbf{r}_{y,i} + \hat{\mathbf{r}}_{y,j}] \end{cases} \quad (21)$$

将上面两式相减,可得

$$\Delta \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_{s,t} - \mathbf{r}_{s,b} = h[(1-\xi)\mathbf{r}_{y,i} + \hat{\mathbf{r}}_{y,j}] \quad (22)$$

很明显,上述矢量的模即为该截面的厚度。为了便于分析,令

$$\mathbf{r}_{s,v} = (1-\xi)\mathbf{r}_{y,i} + \hat{\mathbf{r}}_{y,j} \quad (23)$$

由于 $\mathbf{r}_{s,v}$ 为斜率坐标矢量 $\mathbf{r}_{y,i}$ 和 $\mathbf{r}_{y,j}$ 的线性插值,故当梁单元首尾两截面不再平行时, $\mathbf{r}_{s,v}$ 的模就会小于 1,此时矢量 $\Delta \mathbf{r}_s$ 的模就会小于初始值 h ,即任意截面厚度小于 h 。因此,当梁单元发生变形时,其理论变形构型如图 3 所示。



图 3 经典平面梁单元理论变形构型

Fig. 3 Theoretical deformation configuration of classical planar beam element

图4给出了经典平面梁单元的临界变形构型示意图,可以看出,作为旋转矢量 $\mathbf{r}_{y,i}$ 和 $\mathbf{r}_{y,j}$ 线性插值的结果,梁单元截面从两侧到中部都在逐渐萎缩,并且越是靠近中部萎缩幅度越大。值得注意的是,这种现象随着两斜率矢量 $\mathbf{r}_{y,i}$ 和 $\mathbf{r}_{y,j}$ 夹角的增大而越发严重,特别是当两矢量 $\mathbf{r}_{y,i}$ 和 $\mathbf{r}_{y,j}$ 共线且相反时,此时横向斜率坐标的线性插值将会导致非常严重的虚假变形模态。由式(21)可知,此刻梁单元中部必定存在着一零矢量,即该位置处截面厚度为零,但这与实际情况完全不符。

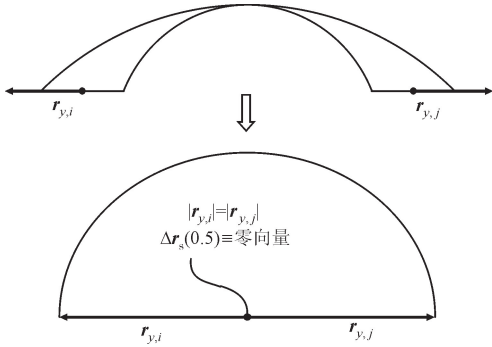


图4 经典平面梁单元临界变形构型

Fig. 4 Critical deformation configuration of classical planar beam element

2 无闭锁平面梁单元

为了消除经典剪变梁单元的闭锁问题,本文提出了一种新的无闭锁平面梁单元,该单元由3个节点的位置坐标横向斜率矢量 $\partial \mathbf{r} / \partial y$ 以及中间节点处的切向斜率矢量 $\partial \mathbf{r} / \partial x$ 表征,如图5所示。

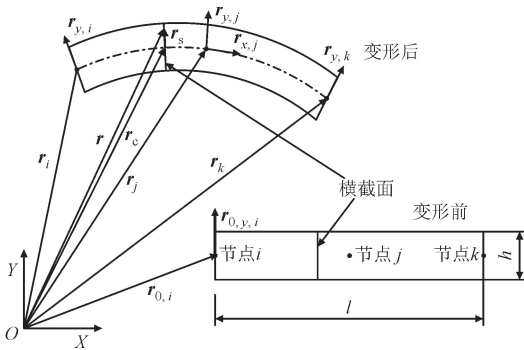


图5 无闭锁平面梁单元变形前后示意图

Fig. 5 Schematic diagram of non locking planar beam element before and after deformation

因此,无闭锁平面梁单元的绝对节点坐标为

$$\mathbf{e}_n = [\mathbf{e}_{n,i} \quad \mathbf{e}_{n,j} \quad \mathbf{e}_{n,k}]^T = [\mathbf{r}_i \quad \mathbf{r}_{y,i} \quad \mathbf{r}_j \quad \mathbf{r}_{x,j} \quad \mathbf{r}_{y,j} \quad \mathbf{r}_k \quad \mathbf{r}_{y,k}]^T \quad (24)$$

式中: $\mathbf{r}_i$ 、 $\mathbf{r}_j$ 、 $\mathbf{r}_k$ 分别为节点 i 、 j 、 k 的全局位置矢量,可写为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}|_{x=0, y=0}; \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{r}|_{x=l/2, y=0}; \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}|_{x=l, y=0} \quad (25)$$

$\mathbf{r}_{y,i}$ 、 $\mathbf{r}_{y,j}$ 、 $\mathbf{r}_{y,k}$ 分别为相应节点处的截面斜率。

相应地,定义无闭锁平面梁单元的位移场为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 x^2 y + a_6 x^3 \\ b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + b_4 x^2 + b_5 x^2 y + b_6 x^3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_n \mathbf{e}_n \quad (26)$$

由此可求出无闭锁平面梁单元形函数的表达式为

$$\mathbf{S}_n = [\mathbf{s}_{n,1} \mathbf{I} \quad \mathbf{s}_{n,2} \mathbf{I} \quad \mathbf{s}_{n,3} \mathbf{I} \quad \mathbf{s}_{n,4} \mathbf{I} \quad \mathbf{s}_{n,5} \mathbf{I} \quad \mathbf{s}_{n,6} \mathbf{I} \quad \mathbf{s}_{n,7} \mathbf{I}] \quad (27)$$

式中: $\mathbf{I}$ 为单位矩阵; 形函数各项分别为

$$\begin{cases} s_{n,1} = 1 - 5\xi + 8\xi^2 - 4\xi^3 \\ s_{n,2} = l\eta(1 - 3\xi + 2\xi^2) \\ s_{n,3} = 4\xi - 4\xi^2 \\ s_{n,4} = l\xi(-2 + 6\xi - 4\xi^2) \\ s_{n,5} = l\eta(4\xi - 4\xi^2) \\ s_{n,6} = \xi - 4\xi^2 + 4\xi^3 \\ s_{n,7} = l\eta(-\xi + 2\xi^2) \end{cases}$$

由式(27)可见,与经典平面剪变梁单元相比,无闭锁平面梁单元的形函数中多了 $\eta\xi^2$ 项,提升了由弯曲引起的应变阶次,同时使得梁厚度不再是两端的线性插值,从根本上解决了经典梁单元的剪切闭锁与厚度闭锁问题。为规避泊松闭锁,本文令泊松比为0。为了方便后续推导方程,下文中的梁单元均指本文提出的无闭锁平面梁单元,故在推导时省略表示梁单元类型的下标。

3 可展机构动力学模型

3.1 梁单元广义质量矩阵

由理论力学可知,梁单元的动能为

$$T_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV \quad (28)$$

式中: ρ 为材料密度; $\dot{\mathbf{r}}$ 为相对惯性参考系的速度。由于梁上任意一点的速度为

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{S}} \mathbf{e} \quad (29)$$

式中: $\dot{\mathbf{e}}$ 为绝对节点速度矢量。

将式(29)代入式(28),得到梁单元的动能为

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{e}} \quad (30)$$

式中: $\mathbf{M}_e$ 为梁单元的质量矩阵,可写为

$$\mathbf{M}_e = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \quad (31)$$

3.2 梁单元动力学方程

由连续介质力学可知,Green-Lagrangian 应变

张量为

$$\epsilon_L = \frac{1}{2} (J^T J - I)$$

(32)

式中:变形梯度雅可比矩阵可写为

$$J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{e} \right) J_0^{-1}$$

(33)

其中 $J_0 = \mathbf{X}/\mathbf{x}$; $\mathbf{x} = [x \ y]^T$; $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_0$ 为梁单元处于参考构型(亦称初始构型)下的绝对节点坐标,则应变张量可写为

$$\epsilon_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_a \mathbf{e} - 1 & \mathbf{e}^T \mathbf{S}_c \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{S}_c \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \mathbf{S}_b \mathbf{e} - 1 \end{bmatrix}$$

(34)

式中

$$\begin{cases} \mathbf{S}_a = \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}_{i,x}^T \mathbf{S}_{i,x} \cos^2 \theta - \mathbf{S}_{i,x}^T \mathbf{S}_{i,y} \sin \theta \cos \theta - \\ \quad \mathbf{S}_{i,y}^T \mathbf{S}_{i,x} \sin \theta \cos \theta + \mathbf{S}_{i,y}^T \mathbf{S}_{i,y} \sin^2 \theta \\ \mathbf{S}_b = \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}_{i,x}^T \mathbf{S}_{i,x} \cos^2 \theta + \mathbf{S}_{i,x}^T \mathbf{S}_{i,y} \sin \theta \cos \theta - \\ \quad \mathbf{S}_{i,y}^T \mathbf{S}_{i,x} \sin \theta \cos \theta + \mathbf{S}_{i,y}^T \mathbf{S}_{i,y} \sin^2 \theta \\ \mathbf{S}_c = \sum_{i=1}^2 \mathbf{S}_{i,x}^T \mathbf{S}_{i,x} \sin \theta \cos \theta + \mathbf{S}_{i,x}^T \mathbf{S}_{i,y} \cos^2 \theta - \\ \quad \mathbf{S}_{i,y}^T \mathbf{S}_{i,x} \sin^2 \theta - \mathbf{S}_{i,y}^T \mathbf{S}_{i,y} \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

(35)

其中 $\mathbf{S}_{i,x}$ 、 $\mathbf{S}_{i,y}$ 为形函数矩阵 $\mathbf{S}$ 第 i 行($i=1, 2$)分别对 x 、 y 求偏导。

基于广义胡克定律,本构方程可写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$$

(36)

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为第二 Piola-Kirchhoff 应力矢量; $\boldsymbol{\epsilon}$ 为应变矢量。因此,梁单元的弹性势能表达式可写为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV$$

(37)

将其对广义坐标 $\mathbf{e}$ 求偏导,可得梁单元的弹性力方程为

$$\mathbf{Q}_{e,e} = - \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} = - \mathbf{K}_e \mathbf{e}$$

(38)

式中: $\mathbf{K}_e$ 为梁单元的刚度矩阵,可表示如下

$$\mathbf{K}_e = (\lambda + 2\mu) \mathbf{K}_1 + \lambda \mathbf{K}_2 + \mu \mathbf{K}_3$$

(39)

$$\begin{cases} \mathbf{K}_1 = \frac{1}{4} \int_V [\mathbf{S}_a^* (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_a \mathbf{e} - 1) + \mathbf{S}_b^* (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_b \mathbf{e} - 1)] dV \\ \mathbf{K}_2 = \frac{1}{4} \int_V [\mathbf{S}_b^* (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_a \mathbf{e} - 1) + \mathbf{S}_a^* (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_b \mathbf{e} - 1)] dV \\ \mathbf{K}_3 = \int_V [\mathbf{S}_c^* (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_c \mathbf{e})] dV \end{cases}$$

(40)

其中 $\mathbf{S}_a^* = \mathbf{S}_a^T + \mathbf{S}_a$; $\mathbf{S}_b^* = \mathbf{S}_b^T + \mathbf{S}_b$; $\mathbf{S}_c^* = \mathbf{S}_c^T + \mathbf{S}_c$ 。

利用第二类拉格朗日方程,梁单元的动力学方程可表示为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial \dot{\mathbf{e}}} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_{e,e}$$

(41)

将式(31)和(39)代入式(41),可得

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_e \mathbf{e} = \mathbf{Q}_e$$

(42)

式中: $\ddot{\mathbf{e}}$ 为绝对节点加速度矢量; $\mathbf{Q}_e$ 为广义力。式(42)即为梁单元的动力学方程。

3.3 剪式单元阵列可展机构动力学模型

剪式单元可展机构是一个由多杆件多铰链构成的柔性系统,因此其动力学模型可采用第一类拉格朗日方程建立,动力学方程写为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d \mathbf{q}_d + \boldsymbol{\Phi}_{d,q} \lambda_d = \mathbf{Q}_d \\ \boldsymbol{\Phi}_d(\mathbf{q}_d, t) = 0 \end{cases}$$

(43)

式中: $\mathbf{q}_d$ 为可展机构的节点坐标矢量; $\boldsymbol{\Phi}_d(\mathbf{q}_d, t)$ 为约束方程; $\boldsymbol{\Phi}_{d,q}$ 为约束方程对节点坐标 $\mathbf{q}_d$ 的偏导; λ_d 为剪式单元可展机构的拉格朗日因子。

4 算例

如图 6 所示,以 3 个剪式单元线性阵列而成的可展机构为研究对象,开展柔体动力学算例分析。图中 θ 为展开角度,惯性坐标系原点 O 固定在点 b_1 处,在点 a_1 和 b_1 处施加约束,限制点 a_1 沿 X 轴方向的平移和点 b_1 沿 X 轴、 Y 轴方向的平移,在点 a_1 处施加沿 Y 轴负方向的驱动力 F 。所采用的杆件为薄壁管空心梁,杆长 L 为 1 m,横截面为 10 mm $\times$ 10 mm 的正方形,壁厚 t_s 为 0.4 mm,驱动力 F 为 -0.1 N,其中负号代表沿 Y 轴负方向,展开角度 θ 初始值为 80° 。可展机构的材料参数见表 1。

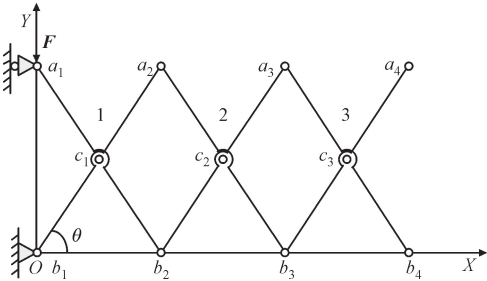


图 6 剪式单元线阵列可展机构

Fig. 6 Scissor type unit line array deployable mechanism

表 1 剪式单元线阵列可展机构的材料参数

Table 1 Material Parameters of Scissor Deployable Mechanism

参数	数值
弹性模量 E/GPa	152
泊松比 ν	0.3
密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	8 026

将每根杆件划分为 4 个梁单元,采用 CPU 为 AMD Ryzen 5 3600 6-Core Processor 3.59 GHz,内存为 8 GB 的计算机开展计算,所用时间如表 2 所示。

表 2 计算时间与效率提升结果

Table 2 Calculation time and efficiency improvement

单元类型	时间/s	效率提升率/%
经典平面剪变梁单元	239.86	
本文所提梁单元	196.32	18.2

采用本文提出的建模方法和已有的数值求解方法^[16]进行可展机构的柔体动力学特性分析,并与多刚体动力学分析结果进行对比,如图 7 所示。图中的两条曲线分别为可展机构上点 a_4 的柔体动力学特性与刚体动力学特性。可以看到在恒力的驱动下,可展机构的展开过程是一个变加速运动。展开过程中,沿 x 轴的位移曲线整体变化较为平缓,

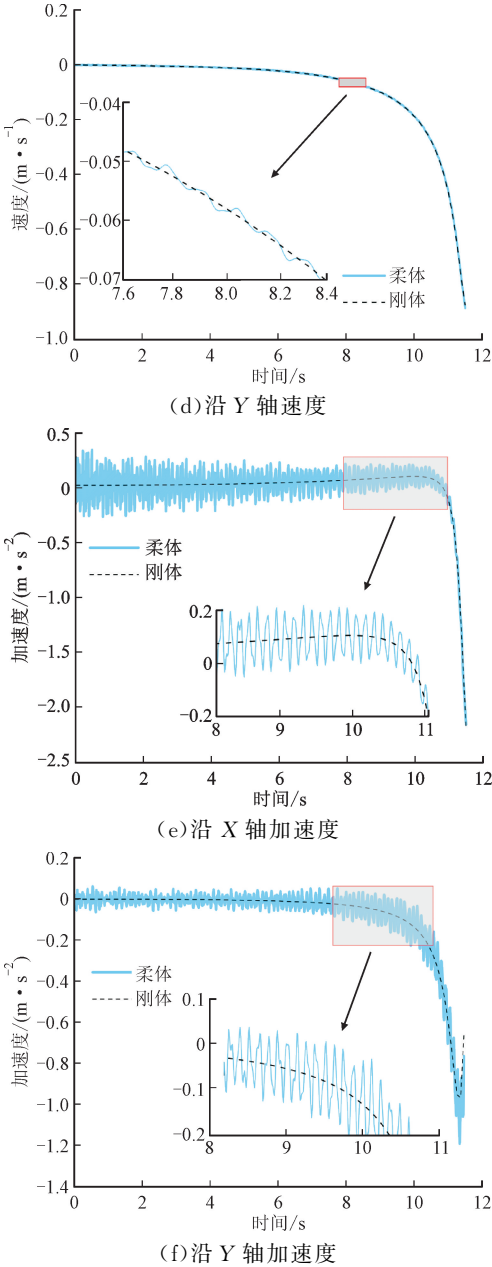
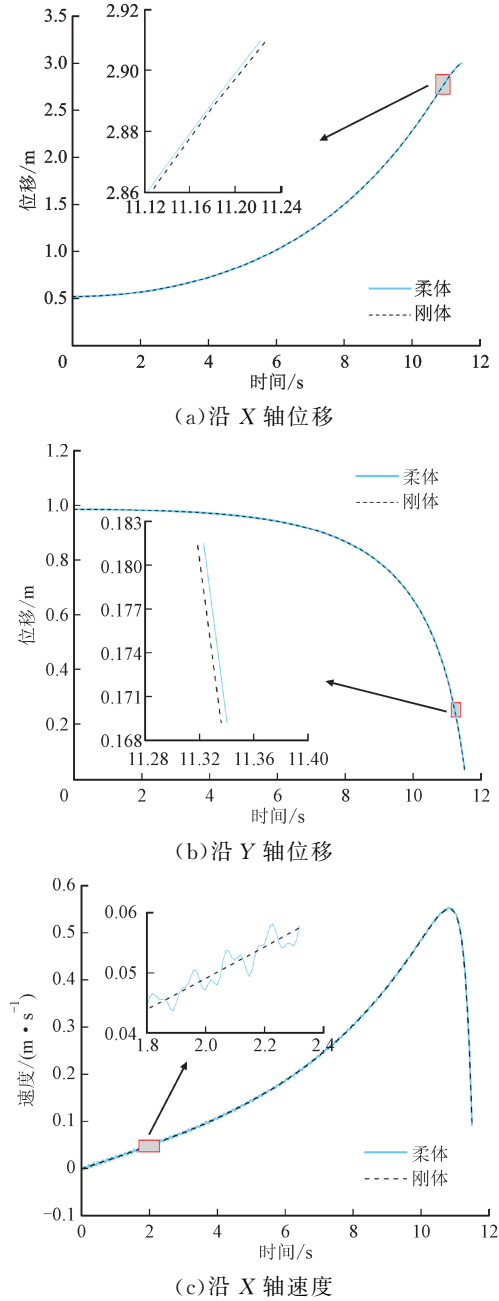
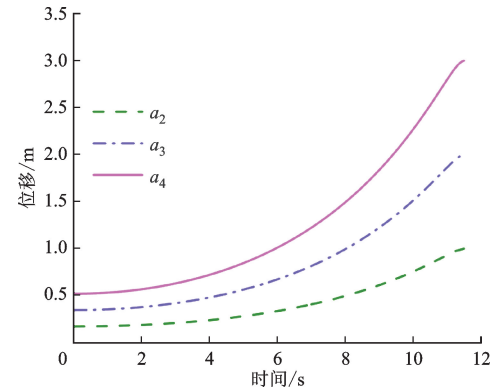


图 7 剪式单元可展机构柔体动力学与刚体动力学的对比 (点 a_4)
Fig. 7 Comparison of flexible and rigid body dynamics of scissor deployable mechanisms (point a_4)

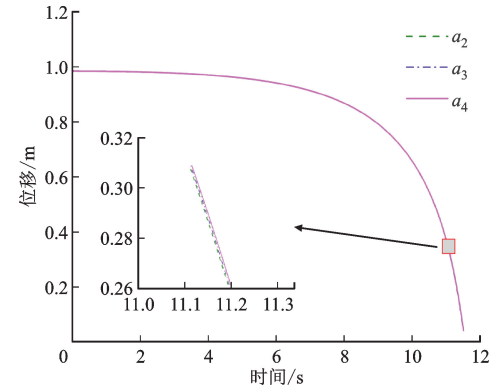
沿 y 轴的位移曲线在 8 s 内变化平缓,8 s 后变化速度增加;在展开前中期,速度、加速度曲线变化均较为平缓;而在展开后期,特别是 10 s 之后,速度和加速度曲线变化剧烈,且绝对值呈迅速增大趋势。因此,若在恒力驱动末期发生突然锁定,将会对可展机构造成极大冲击。对比图中柔体动力学特性曲线和刚体动力学特性曲线可知,当考虑柔性后,速度和加速度曲线均发生了不同程度振动,其中加速度振动尤为显著,这将导致可展机构的展开运动不够平稳,同时也可能引发航天器的共振、谐振等现象。此外,

由于发生了拉伸、剪切和弯曲等弹性变形,可展机构的柔体展开位移与刚体展开位移也有了一定的差异,沿 X 轴方向和沿 Y 轴方向的最大差异分别为 6.5 mm 和 5.9 mm。

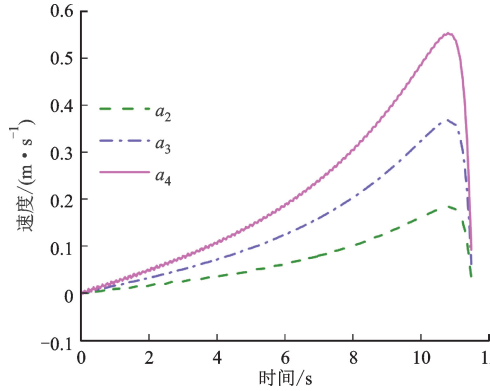
考虑柔性后,可展机构同一水平线上各点展开运动的数值仿真结果如图 8 所示。从图 8(a)和(b)看,可展机构的柔性主要是对可展机构同一水平线上点的运动同步性(同一水平线上点的运动一致或成比例)造成了影响,这在图 8(b)中表现得尤为明显。点 a_2 、 a_3 、 a_4 沿 Y 轴方向的位移曲线不再完全重合,3 个点沿 Y 轴方向的位移随展开运动的进行逐渐产生差异,且当沿 Y 轴方向的加速度在 $t=11.39$ s 达到最大时,3 点之间的位移差达到最大,为 5.04 mm。



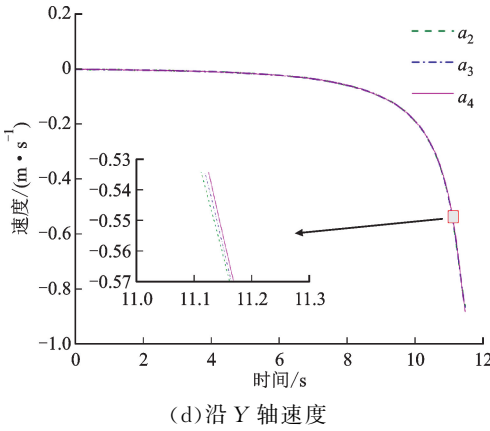
(a)沿 X 轴位移



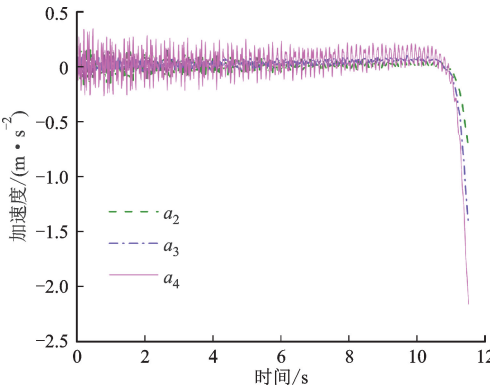
(b)沿 Y 轴位移



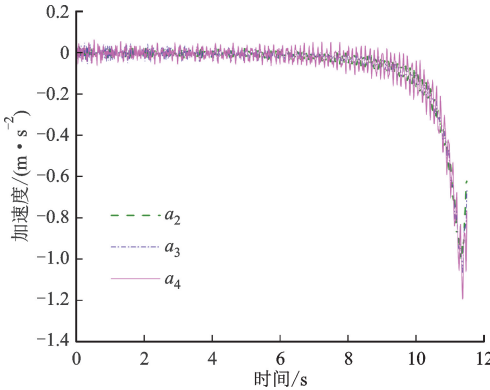
(c)沿 X 轴速度



(d)沿 Y 轴速度



(e)沿 X 轴加速度



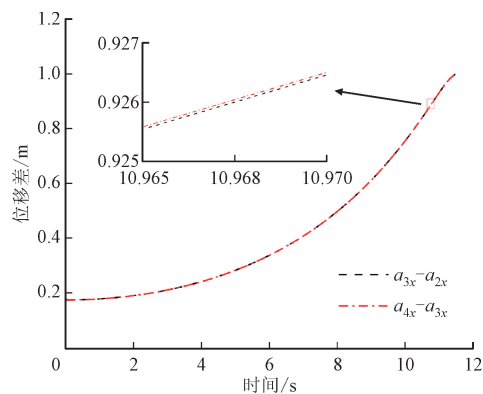
(f)沿 Y 轴加速度

图 8 可展机构上点 a_2 、 a_3 、 a_4 的展开运动

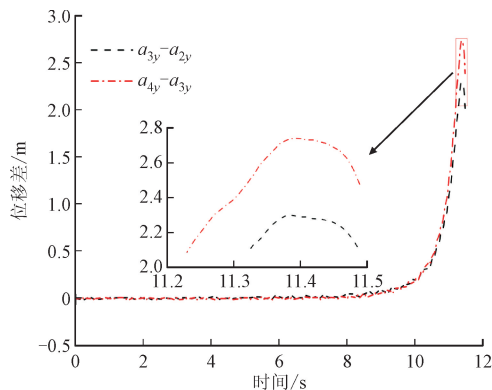
Fig. 8 Deployment motion of points a_2 , a_3 and a_4 on the deployable mechanism

从点 a_2 、 a_3 、 a_4 的速度曲线图(c)和(d)以及加速度曲线图(e)和(f)可以看到,3 个点的速度和加速度除了沿 Y 轴不再同步外,还均发生了明显的振动,点 a_4 对应的振动始终保持最大且最明显;另一方面,点 a_2 、 a_3 、 a_4 沿 X 轴方向的速度均在 10.8 s~10.9 s 内达到峰值,随后便迅速减小,造成此现象的原因是对应加速度的方向由正转为负且绝对值迅速增大。为了进一步观察可展机构的运动同步性,图 9 给出了展开运动过程中的位移差图。由

图可见,可展机构上点 a_2 、 a_3 、 a_4 的位移沿 X 轴同步性较好,但在 Y 轴方向均有一定波动,且 10 s 后的位移差明显增大,此现象的产生应与机构外载有直接关系。



(a)沿 X 轴位移差



(b)沿 Y 轴位移差

图9 可展机构上点 a_2 、 a_3 、 a_4 的位移差

Fig. 9 Displacement difference of points a_2 , a_3 and a_4 deployable mechanism

5 结 论

基于绝对节点坐标法,本文提出了一种新型的无闭锁平面梁单元,能解决经典剪变平面梁单元中的单元闭锁问题,可有效模拟具有大变形、大转角特性可展机构的动力学行为。采用所提模型对三单元剪式可展机构开展柔体动力学分析,结果表明当引入柔性后,可展机构的展开运动行为与刚体时有明显不同,速度和加速度等动力学特性均表现出一定的振动特性,可能会引起不同航天结构间的共振与谐振现象,从而影响机构的展开精度。由以上分析可知,由于可展机构的运动是大范围刚体运动和小幅度振动以及变形的耦合过程,并且越靠近末端这种振动和变形就越明显,因此在对可展机构运动规律进行预测时,必须要考虑柔性的影响。

参考文献:

- [1] 余德文, 赵强强, 陈飞飞, 等. 利用结构等效转换的空间可展机构装配误差建模与灵敏度分析 [J]. 西安交通大学学报, 2019, 53(4): 15-23.
YU Dewen, ZHAO Qiangqiang, CHEN Feifei, et al. Assembly error modeling and sensitivity analysis for spatial deployable mechanisms with structural equivalent transformation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2019, 53(4): 15-23.
- [2] WANG Chunlong, GUO Hongwei, LIU Rongqiang, et al. A programmable origami-inspired space deployable structure with curved surfaces [J]. Engineering Structures, 2022, 256: 113934.
- [3] ZHAO Ningxiner, HARNE R L. Reconfigurable acoustic arrays with deployable structure based on a Hoberman-Miura system synthesis [J]. Journal of Mechanical Design, 2021, 143(6): 063301.
- [4] ZHANG Liyuan, ZHENG Yang, YIN Xu, et al. A tensegrity-based morphing module for assembling various deployable structures [J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 173: 104870.
- [5] LI Bo, WANG Sanmin, TAN Uxuan. Buckling analysis of planar linear uniform deployable structures consisting of scissor-like element in space under compression [J]. Science China Technological Sciences, 2021, 64(3): 493-507.
- [6] TANG Yaqiong, SHI Zhiyang, LI Tuanjie, et al. Double-layer cable-net structures for deployable umbrella reflectors [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2019, 32(5): 04019068.
- [7] 张霄, 李明, 崔琦峰, 等. 基于正六边形折纸的单自由度可展结构 [J]. 机械工程学报, 2021, 57(11): 153-164.
ZHANG Xiao, LI Ming, CUI Qifeng, et al. Regularly hexagonal origami pattern inspired deployable structure with single degree of freedom [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(11): 153-164.
- [8] VALAYIL T P, VELAPPAN S, PANDIAN P L. Analysing the kinematic characteristics of Bennett mechanisms and its networks for usage in forming deployable structures [J]. Mechanika, 2019, 25(4): 269-275.
- [9] LI Bo, WANG Sanmin, GANTES C J, et al. Nonlinear dynamic characteristics and control of planar linear array deployable structures consisting of scissor-like elements with revolute clearance joint [J]. Advances in Structural Engineering, 2021, 24(7): 1439-1455.
- [10] WANG Z X, WANG Y Q, SOJEONG J, et al. Ex-

- perimental investigation and parametric analysis on overall buckling behavior of large-section aluminum alloy columns under axial compression [J]. *Thin-Walled Structures*, 2018, 122: 585-596.
- [11] KIDAMBI N, WANG K W. Dynamics of Kresling origami deployment [J]. *Physical Review E*, 2020, 101(6): 063003.
- [12] MA Xiaofei, LI Tuanjie, MA Jingya, et al. Recent advances in space-deployable structures in China [J]. *Engineering*, 2022, 17: 207-219.
- [13] 祝恒佳, 杨丽昆, 祝世兴, 等. 考虑机翼柔性的磁流变减振起落架落振动力学分析 [J]. *西安交通大学学报*, 2022, 56(12): 56-67.
- ZHU Hengjia, YANG Likun, ZHU Shixing, et al. Analysis of impacts of magnetorheological landing gear on aircraft dynamics considering wing flexibility [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2022, 56(12): 56-67.
- [14] 白发刚, 薛钢, 黄健堃, 等. 仿生机器鱼水动力学与机构动力学耦合建模研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2022, 56(9): 46-56.
- BAI Fagang, XUE Gang, HUANG Jiankun, et al. Coupling modeling of hydrodynamics and mechanism dynamics of bionic robot fish [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2022, 56(9): 46-56.
- [15] FOTLANG G, HAUGEN B. Numerical integration algorithms and constraint formulations for an ALE-ANCF cable element [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 170: 104659.
- [16] PENG Qi'an, WANG Sanmin, LI Bo, et al. Dynamics analysis of deployable structures considering a two-dimensional coupled thermo-structural effect [J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2018, 2018: 1752815.
- [17] OTSUKA K, MAKIHARA K. Absolute nodal coordinate beam element for modeling flexible and deployable aerospace structures [J]. *AIAA Journal*, 2019, 57(3): 1343-1346.
- [18] YOU Bindi, LIANG Dong, YU Xiangjie, et al. Deployment dynamics for flexible deployable primary mirror of space telescope with paraboloidal and laminated structure by using absolute node coordinate method [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, 34(4): 306-319.
- [19] GARCÍA-VALLEJO D, MIKKOLA A M, ESCALONA J L. A new locking-free shear deformable finite element based on absolute nodal coordinates [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 50(1): 249-264.
- [20] 刘钺, 胡海岩. 基于李群局部标架的多柔体系统动力学建模与计算 [J]. *力学学报*, 2021, 53(1): 213-233.
- LIU Cheng, HU Haiyan. Dynamic modeling and computation for flexible multibody systems based on the local frame of LIE group [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(1): 213-233.
- [21] OTSUKA K, MAKIHARA K, SUGIYAMA H. Recent advances in the absolute nodal coordinate formulation: literature review from 2012 to 2020 [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2022, 17(8): 080803.
- [22] SHABANA A A, XU Lingmin. Rotation-based finite elements: reference-configuration geometry and motion description [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2021, 37(1): 105-126.
- [23] LI Tuanjie, WANG Yao. Deployment dynamic analysis of deployable antennas considering thermal effect [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2009, 13(4/5): 210-215.
- [24] OMAR M A, SHABANA A A. A two-dimensional shear deformable beam for large rotation and deformation problems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 243(3): 565-576.
- [25] SHABANA A A, YAKOUB R Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2001, 123(4): 606-613.

(编辑 李慧敏 刘杨)